

Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (2000 – 2001)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. a 、 b 和 c 分別為 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的相對邊的長度。若 $\angle C = 60^\circ$ 及 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = P$ ，求 P 的值。

a , b and c are the lengths of the opposite sides of $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$ of the $\triangle ABC$ respectively.

If $\angle C = 60^\circ$ and $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = P$, find the value of P .

2. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$ 是 $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ 和 $2x^3 + 7x^2 + 9x + 10$ 的公因式。若 $f(P) = Q$ ，求 Q 的值。

Given that $f(x) = x^2 + ax + b$ is a common factor of $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ and $2x^3 + 7x^2 + 9x + 10$.

If $f(P) = Q$, find the value of Q .

3. 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{Q}{a+b}$ 及 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = R$ ，求 R 的值。

Given that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{Q}{a+b}$ and $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = R$, find the value of R .

4. 已知 $\begin{cases} a+b=R \\ a^2+b^2=12 \end{cases}$ 及 $a^3+b^3=S$ ，求 S 的值。

Given that $\begin{cases} a+b=R \\ a^2+b^2=12 \end{cases}$ and $a^3+b^3=S$, find the value of S .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Final Event 2 (Individual)

香港數學競賽 (2000 – 2001)

決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 P 為整數，及 $5 < P < 20$ 。若方程 $x^2 - 2(2P - 3)x + 4P^2 - 14P + 8 = 0$ 的兩個根皆為整數，求 P 的值。

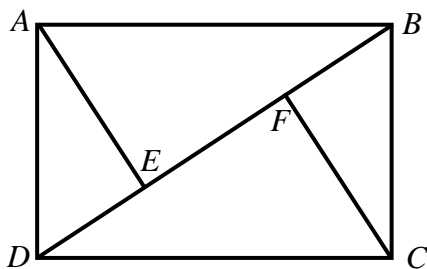
Suppose P is an integer and $5 < P < 20$. If the roots of the equation

$x^2 - 2(2P - 3)x + 4P^2 - 14P + 8 = 0$ are integers, find the value of P .



2. $ABCD$ 是一長方形。若 $AB = 3P + 4$ ， $AD = 2P + 6$ ， AE 和 CF 分別垂直於對角線 BD ，及 $EF = Q$ ，求 Q 的值。

$ABCD$ is a rectangle. $AB = 3P + 4$, $AD = 2P + 6$. AE and CF are perpendiculars to the diagonal BD . If $EF = Q$, find the value of Q .



3. 某班學生的人數少於 $4Q$ 人。在一次數學測驗中有 $\frac{1}{3}$ 學生得甲等， $\frac{1}{7}$ 學生得乙等，一半學生得丙等，餘下的學生都不合格。已知不合格的學生人數是 R ，求 R 的值。

There are less than $4Q$ students in a class. In a mathematics test, $\frac{1}{3}$ of the students got grade A,

$\frac{1}{7}$ of the students got grade B, half of the students got grade C, and the rest failed. Given that R

students failed in the mathematics test, find the value of R .



4. $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數。例如 $[2\frac{1}{3}] = 2$ 。已知方程 $[3x + R] = 2x + \frac{3}{2}$ 的所有根的和為 S ，求 S 的值。

$[a]$ represents the largest integer not greater than a . For example, $[2\frac{1}{3}] = 2$. Given that the sum of the roots of the equation $[3x + R] = 2x + \frac{3}{2}$ is S , find the value of S .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Final Event 3 (Individual)

香港數學競賽 (2000 – 2001)

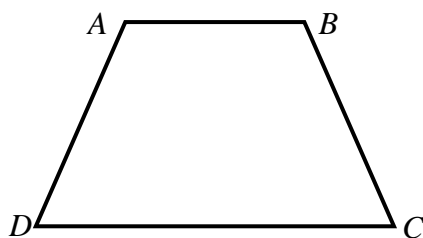
決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. $ABCD$ 是一梯形，其 $\angle ADC = \angle BCD = 60^\circ$ 及 $AB = BC = AD = \frac{1}{2}CD$ 。若把這梯形分割為 P 等分 ($P > 1$)，使其分割所得的每份與梯形 $ABCD$ 相似。求 P 的最小值。

$ABCD$ is a trapezium such that $\angle ADC = \angle BCD = 60^\circ$ and $AB = BC = AD = \frac{1}{2}CD$. If this trapezium is divided into P equal portions ($P > 1$) and each portion is similar to trapezium $ABCD$ itself. Find the minimum value of P .



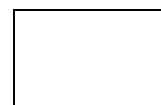
2. $(P+1)^{2001}$ 的個位數字與十位數字之和是 Q ，求 Q 的值。

The sum of the tens and unit digits of $(P+1)^{2001}$ is Q . Find the value of Q .



3. 若 $\sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^Q 30^\circ = 1 - \cos^R 45^\circ$ ，求 R 的值。

If $\sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^Q 30^\circ = 1 - \cos^R 45^\circ$, find the value of R .



4. 設方程 $x^2 - 8x + (R+1) = 0$ 的根為 α 和 β 。若 $\frac{1}{\alpha^2}$ 和 $\frac{1}{\beta^2}$ 是方程 $225x^2 - Sx + 1 = 0$ 的根，求 S 的值。

Let α and β be the roots of the equation $x^2 - 8x + (R+1) = 0$. If $\frac{1}{\alpha^2}$ and $\frac{1}{\beta^2}$ are the roots of the equation $225x^2 - Sx + 1 = 0$, find the value of S .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (2000 – 2001)

決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知 $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = 17\frac{1}{2}$, $x = a + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, $y = b + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ 。若 $P = (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}}$, 求 P 的值。

Let $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = 17\frac{1}{2}$, $x = a + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ and $y = b + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. If $P = (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}}$, find the value of P .

2. 若一正 Q 邊形有 P 條對角線，求 Q 的值。

If a regular Q -sided polygon has P diagonals , find the value of Q .

3. 已知 $x = \sqrt{\frac{Q}{2}} + \sqrt{\frac{Q}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{Q}{2}} - \sqrt{\frac{Q}{2}}$ 。若 $R = \frac{x^6 + y^6}{40}$, 求 R 的值。

Let $x = \sqrt{\frac{Q}{2}} + \sqrt{\frac{Q}{2}}$ and $y = \sqrt{\frac{Q}{2}} - \sqrt{\frac{Q}{2}}$. If $R = \frac{x^6 + y^6}{40}$, find the value of R .

4. 已知 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數。例如 $[2.5] = 2$ 。若 $S = \left[\frac{2001}{R} \right] + \left[\frac{2001}{R^2} \right] + \left[\frac{2001}{R^3} \right] + \dots$, 求 S 的值。

$[a]$ represents the largest integer not greater than a . For example , $[2.5] = 2$. If

$S = \left[\frac{2001}{R} \right] + \left[\frac{2001}{R^2} \right] + \left[\frac{2001}{R^3} \right] + \dots$, find the value of S .